教学设计

<table>
<tr><th colspan="6">3.2.2 双曲线的简单几何性质（第 1 课时）</th></tr>
<tr><td>学科</td><td>数学</td><td>年级</td><td>高二</td><td>学期</td><td>秋季</td></tr>
<tr><td>备课人</td><td>刘俊华 李晗</td><td>学校</td><td colspan="3">东营市第一中学</td></tr>
<tr><td rowspan="2">教科书</td><td colspan="5">书名：高中数学选择性必修第一册（2019A 版）</td></tr>
<tr><td colspan="5">出版社：人民教育出版社</td></tr>
<tr><th colspan="6">教材分析</th></tr>
<tr><td colspan="6">本节课是 2019 人教 A 版高中数学选择性必修一第三章《圆锥曲线的方程》第二单元《双曲线》中《双曲线的简单几何性质》的第一课时，本节知识是讲完了双曲线及其标准方程之后，反过来利用双曲线的方程研究双曲线的几何性质。它是教学大纲要求学生必须掌握的内容，也是高考的一个考点。
本节内容类似于“椭圆的简单的几何性质”，教学中用类比的研究方法进行讲解，主要应指出它们的联系与区别。对圆锥曲线来说，渐近线是双曲线特有的性质，利用图形启发引导学生理解渐近线的几何意义，渐近线的位置、渐近线与双曲线张口之间的关系是学生学习离心率的概念、搞懂离心率与双曲线形状之间的关系。</td></tr>
<tr><th colspan="6">学情分析</th></tr>
<tr><td colspan="6">通过对 “直线和圆的方程”和“椭圆”的学习，学生对坐标法有较深刻的认识，懂得如何通过研究方程的性质间接地来研究曲线的性质，可以类比研究椭圆的几何性质的方法和步骤，自主探究双曲线的范围、对称性、顶点、离心率这些性质．因此，学生具备由方程探究双曲线几何性质的知识和能力基础.
对圆锥曲线来说，渐近线是双曲线特有的性质，而学生对渐近线的发现的接受、理解和掌握有一定的困难。（教科书在本节末的“探究与发现”栏目中，解释了“为什么是双曲线的渐近线”供学生阅读参考）因此，借助多媒体用几何画板给学生动态演示了双曲线上点的移动过程，让学生直观感受了渐近线，学生也易接受。至于离心率对双曲线“张口”大小的影响，如何从“数”的角度去解释，对接触解析几何不深的高二同学来说亦有难度.</td></tr>
<tr><th colspan="6">课程标准及目标分析</th></tr>
<tr><td colspan="6">课程标准：掌握双曲线的简单几何性质，理解双曲线离心率的定义、取值范围和渐近线的方程.
目标分析：1、通过双曲线的几何性质的学习，培养学生直观想象、数学抽象核心素养.
2、类比椭圆研究双曲线的几何性质，培养学生逻辑推理核心素养.
3、运用双曲线的标准方程讨论几何性质，培养学生数学运算核心素养.</td></tr>
<tr><th colspan="6">教学重难点</th></tr>
</table>

教学重点：理解双曲线的简单几何性质，运用双曲线的方程获得几何性质.

教学难点：双曲线的渐近线及离心率的意义.

教学方法

教法：根据本节课的特点，采用引导发现和类比归纳相结合的教学方法，引导学生利用已学知识解决新的问题，调动学生的积极性，鼓励学生通过观察图形发现问题，突破难点。

学法：学生在教师创设的问题情境中，通过观察、类比、探究、归纳，用所学知识解决新的问题，并通过多媒体演示让学生更形象的了解了图形的变化，体现了类比和数形结合的数学思想方法的应用。

教学环境

1、多媒体教室

2、几何画板软件、投屏软件

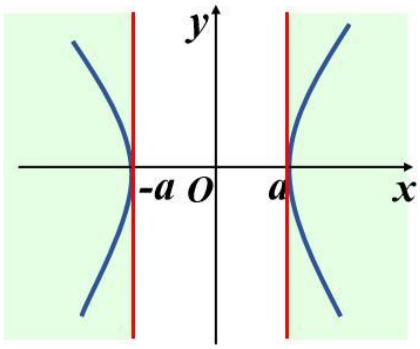
课时安排

第一课时（共 2 课时）

教学过程

教师活动	学生活动	设计意图
环节一：复习回顾，回味双曲线		
师：展示上节课双曲线定义的动画并提问，问题 1：双曲线的定义是什么？ 生：平面内到两定点 F1,F2 距离之差的绝对值为非零常数（小于|F1F2|）的点的轨迹.即 $\|\|MF1\|-\|MF2\|\|=2a$ $(0<2a<2c=\|F1F2\|)$ 师：问题 2：标准方程是什么？ 生：焦点在 X 轴上，$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 焦点在 Y 轴上：$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$	学生根据动画回忆双曲线的定义及标准方程.	通过复习已学知识，为本节内容的学习做铺垫。

<table>
<tr><td colspan="3">环节二：类比推理，探究双曲线</td></tr>
<tr>
<td>
师：问题 3：在椭圆的简单几何性质的研究中，我们分别从“数”和“形”两方面探究了椭圆的“范围”、“对称性”、“顶点”、“离心率”，双曲线能类比研究其几何性质吗？

生：应该也可以.
师：类比椭圆，我们仍然以焦点在 X 轴上的双曲线为例来探究几何性质.
1、范围
从“形”上：


生：观察发现
$x \le -a$或$x \ge a, y \in R$

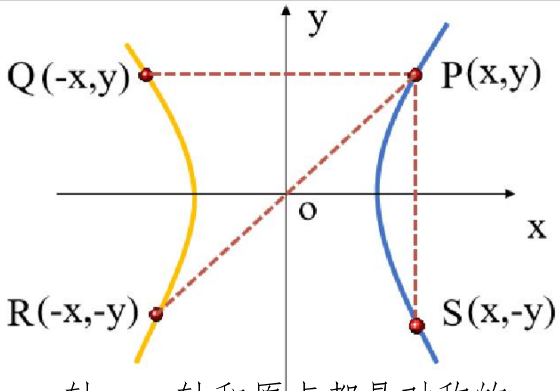
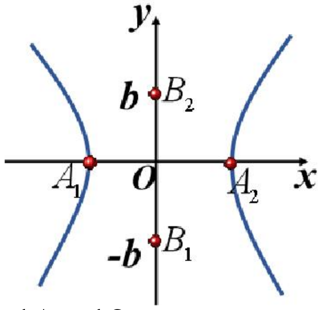
师：从“数”上呢？

师生：共同回忆椭圆时的处理方式
之前：
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\frac{x^2}{a^2}=1-\frac{y^2}{b^2}\ge 0 \qquad \frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}\ge 0$$
$$-b\le y\le b \qquad -a\le x\le a$$
师：双曲线呢？
生：
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\frac{x^2}{a^2}=1+\frac{y^2}{b^2}\ge 0$$
$$y\in R$$
$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1\ge 0$$
$$\therefore x\ge a或x\le -a$$
</td>
<td>
学生先观察图形,老师从“数”上作引导.

让学生类比独立完成.
</td>
<td>
让学生在明确的研究问题、研究方法的指引下学习与探究，提高思维的主动性、深刻性，避免思维的被动性和盲目性 .

明确研究曲线范围实质上是研究什么，以及怎么样通过方程研究.

培养学生类比迁移能力.
</td>
</tr>
</table>

2、对称性 从“形”上：  生：观察发现：关于 x 轴、y 轴和原点都是对称的. 师：坐标轴是双曲线的对称轴，原点是双曲线的对称中心，双曲线的对称中心叫做双曲线的中心. 师：从“数”上呢？ 任取双曲线上一点(x,y),则$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 故$\frac{x^2}{a^2}-\frac{(-y)^2}{b^2}=1$,从而$S(x,-y)$在图像上，图像关于$x$轴对称. $\frac{(-x)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,从而$Q(-x,y)$在图像上，图像关于$y$轴对称. $\frac{(-x)^2}{a^2}-\frac{(-y)^2}{b^2}=1$,从而$R(-x,-y)$在图像上，图像关于原点对称.	学生观察思考后回答.	明确曲线的对称性的实质，以及怎么样通过方程判断曲线是否关于坐标轴或原点对称.
3、顶点 师：双曲线与对称轴的交点，叫做双曲线的顶点. 从“形”上：  生：观察发现：有两个顶点 A1、A2. 师：从“数”上呢？ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	观察发现并思考回答.	明确曲线顶点的含义以及通过方程研究曲线顶点的思路与方法.

生：令 y = 0，得 x = ±a；因此，双曲线与 x 轴有两个交点 A1(—a，0)，A2(a，0)，称为双曲线的顶点.

令 x = 0，得 y^2=-b^2，这个方程没有实数解，可见该双曲线与 y 轴没有交点．但我们也把 B1(0，—b)，B2(0，b)画出来.

师：

线段A_1A_2——实轴

线段A_1A_2的长$2a$——实轴长

a——实半轴长

线段B_1B_2——虚轴

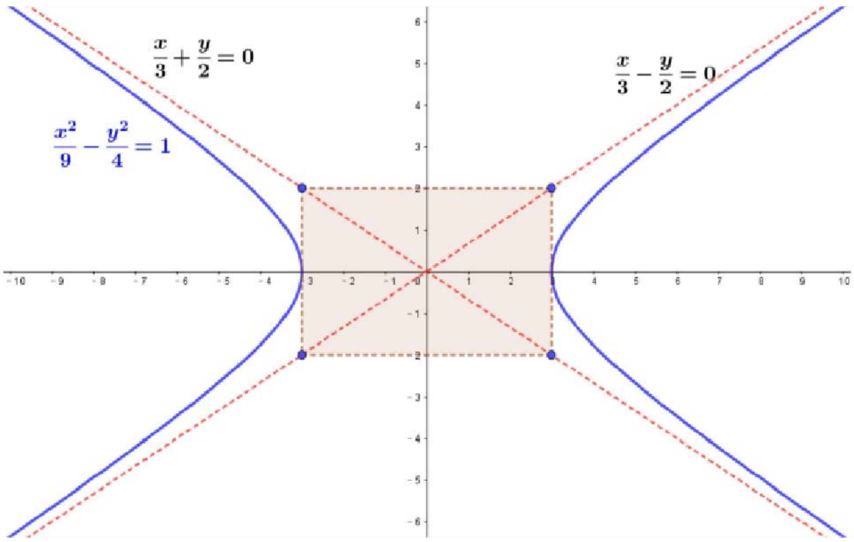
线段B_1B_2的长$2b$——虚轴长

b——虚半轴长

环节三：作图发现，解锁新性质

4、渐近线

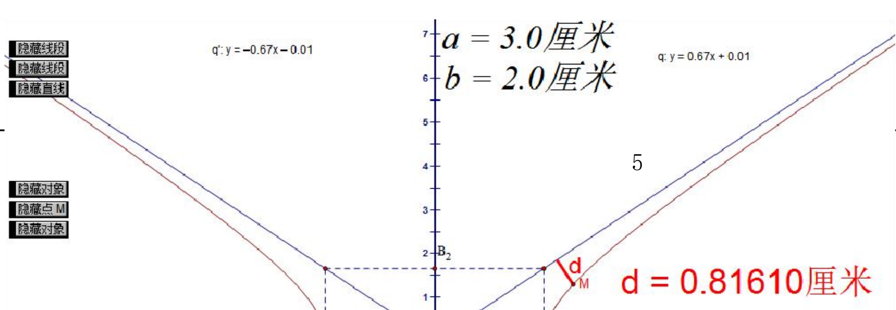
师：问题 4：某天，小明在画双曲线 x^2/9-y^2/4=1 时，意外发现该图似乎无限贴近图中矩形的两条对角线，小张觉得是因为小明图画的不准确导致的。



师：同学们有方法检测是否“无限贴近”吗？

生：任取双曲线上一点，度量其到直线的距离.

师：下面我们用几何画板软件来检测其距离，观察距离的变化.



通过具体事例让学生主动发现，更直接、更容易接受.

这样设计，更符合人的认知规律.

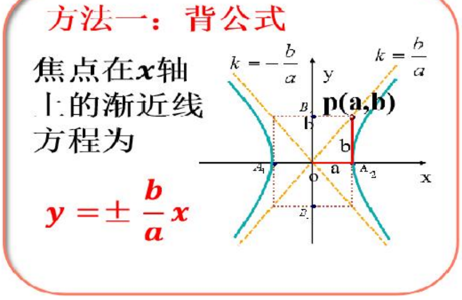
<table>
<tr>
<td>
生：确实逐渐贴近.

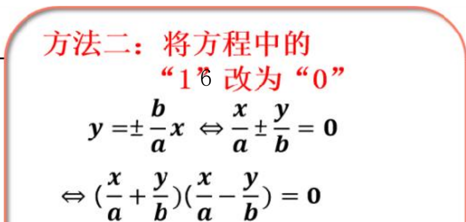
师：追问 1:这两条与双曲线“无限贴近”的直线的方程是什么？
一般地，双曲线 x2/a2－y2/b2＝1(a>0，b>0) 的两支向外延伸时，与两条直线 y=±b/ax 逐渐接近，我们把这两条直线叫做双曲线的渐近线．实际上，双曲线与它的渐近线无限接近，但永远不相交．

师：你能从“数”的角度解释它么？
请同学们课后自主学习课本第 128 页“探究与发现”．
追问 2:以后怎样画更加准确的双曲线的简图？

生：（1）标出点 A1、A2、B1、B2；
（2）绘出矩形框；
（3）画出矩形对角线所在直线（即渐近线）；
（4）描出双曲线.

师：追问 3:已知双曲线的方程 $x^2/a^2-y^2/b^2=1$，如何得出渐近线的方程？

生：背公式


师：我们从结果再来研究一下


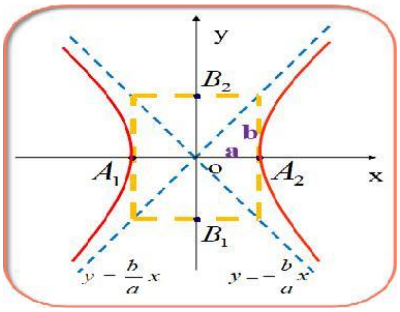
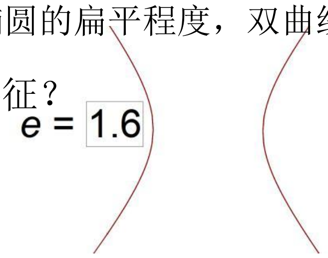
</td>
<td>
观察发现，验证自己的猜想.

讨论并回答
</td>
<td>
通过几何画板演示双曲线上的点到直线的距离的变化，体会这个距离无限接近于0，直观反映“渐近”的特征.

引导学生从数的角度去解释,数形结合.

引导学生利用性质作图.

带领学生从两个不同的角度去认识双曲线的渐近线方程.
</td>
</tr>
</table>

师：追问 4:当 a=b 时，实轴长和虚轴长如何？ 生：实轴长和虚轴长都等于 2a.  师：矩形框有何变化？ 生：变为正方形. 师：渐近线方程如何，两渐近线有何特征？ 生：渐近线方程为 y=±x，它们互相垂直. 师：实轴长和虚轴长相等的双曲线命个什么名比较贴切呢？ 生：等轴双曲线. **5、离心率** 师：与椭圆类似，双曲线的焦距 2c 与实轴长 2a 的比 c/a，叫做双曲线的离心率. 因为 c>a>0，所以双曲线的离心率 e=c/a>1. 思考：椭圆的离心率刻画了椭圆的扁平程度，双曲线的离心率刻画双曲线的什么几何特征？  师：我们首先使用几何画板从“形”的角度动态观察一下 e 的变化对图像的影响. 生：双曲线的离心率刻画了双曲线的“张口”大小. e 越大，“张口”越大. 师：追问:用双曲线渐近线的斜率 b/a 能刻画双曲线的“张口”大小吗？它与用离心率 c/a 刻画“张口”大小有什么联系和	思考并回答 依次回答追问 4 的有关问题. 教师利用信息技术展示图像的变化，学生从直观上得出离心率对双曲线张口大小的影响. 学生利用 a、b、c 的关系	伴随着学生对追问 4 的回答，轻松学习等轴双曲线有关知识. 借助信息技术的演示，会增强学生对“双曲线的离心率是如何影响双曲线张口大小”的认识。

区别？

从“数”上：

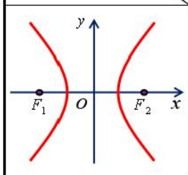
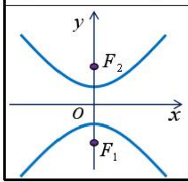
生：能，斜率 b/a 越大，倾斜角越大，“张口”越大.

$$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{a}=\sqrt{(\frac{c}{a})^2-1}$$

c/a 越大，斜率 b/a 越大，“张口”越大.

师：你更倾向于用那个数据来刻画“张口”大小呢？

生：用 e 刻画，a 与 c 是双曲线定义的原始数据，也易于控制. 师：你能类比得出焦点在 y 轴的双曲线的几何性质吗？生：能，类比椭圆，将 x 与 y 互换位置即可.

性质 / 图象	方程	范围	对称性	顶点	渐近线	离心率
	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$x\geq a$或 $x\leq -a$, $y\epsilon R$	关于坐标轴和原点都对称	$(-a,0)$ $(a,0)$	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$e=\frac{c}{a}>1$ $c^2=a^2+b^2$, c最大
	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$	$y\geq a$或 $y\leq -a$, $x\epsilon R$		$(0,-a)$ $(0,a)$	$y=\pm\frac{a}{b}x$	

进行变形，探究斜率 b/a 与离心率 e 的关系.

从“数”的角度探究离心率对“张口”大小的影响.

环节四：例题辨析，玩转双曲线

$$9y^2-16x^2=144$$

例 3、求双曲线　　　　　　　　的实半轴长和虚半轴长、焦点坐标、离心率、渐近线方程. 生：解：把双曲线的方程 9y2－16x2＝144 化为标准方程 $\frac{y^2}{4^2}-\frac{x^2}{3^2}=1$ 由此可知，实半轴长 a＝4，虚半轴长 b＝3； $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{42+32}=5$ ，焦点坐标是（0，－5），（0，5）； 离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$；渐近线方程为 $y=\pm\frac{4}{3}x$.	学生根据所学，独立完成并回答.	巩固双曲线的几何性质.
环节五：达标检测，摸底双曲线		
1. 求下列双曲线的实轴与虚轴的长，顶点和焦点的坐标，离心率，渐近线方程. (1) $x^2-8y^2=32$;　(2) $9x^2-y^2=81$;　(3) $x^2-y^2=-4$;　(4) $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{25}=-1$. 2.求符合下列条件的双曲线的标准方程: (1)顶点在x轴上, 两顶点间的距离是8, $e=\frac{5}{4}$;　$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ (2)焦点在x轴上, 焦距是16, $e=\frac{4}{3}$.　$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{28}=1$ 3.对称轴都在坐标轴上的等轴双曲线的一个焦点是$F_1(-6,0)$, 求双曲线的标准方程和渐近线方程.　$\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{18}=1, y=\pm x$ 4.双曲线的渐近线方程是$y=\pm 2x$, 虚轴长为4,求双曲线的标准方程.　$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{4}=1$	学生练习检测	双曲线性质的灵活应用，检测本节课学生所学.
环节六：课时小结，回归双曲线		
1、本节课学到了双曲线的哪些性质？ 生：范围、对称性、顶点、渐近线、离心率 2、运用了什么数学思想获取这些性质的？ 生：类比迁移，数形结合 3、你想学习几何画板软件探究这些性质吗？ 生：想	学生进行课堂小结，还可以提出自己的困惑，师生探讨。	通过总结，让学生进一步巩固本节所学内容，提高概括能力。
环节七：课后作业，巩固双曲线		
（一）基础类作业（必做） 教科书第 127 页习题 3.2 第 1,2,3,4 题 （二）探究类作业（选做） 小组合作探究用“几何画板”软件制作动画，来探究双曲线的几何性质.	学生课后根据能力完成分层作业.	分层次布置作业，提高学生的学习效率，并发现教学的不足。
板书设计		

3.2.2 双曲线的简单几何 性质（1） 一、概念 1、范围 2、对称性 3、顶点 4、渐近线 5、离心率	希沃白板展示区 PPT演示 几何画板动画演示 二、典例分析 例1及学生解答投影	三、达标检测 四、课堂小结 五、课后作业

教学反思

数学思想方法是在思维深度参与的数学体验和感悟中，逐步形成的。本节课最重要的方法是用代数方法研究几何问题。双曲线的每一步图形的精细的过程，都是从方程的角度研究图形的体验过程，每一步的探究都将学生的思维逼进“墙角”，让学生想到只能从方程的角度去研究。学生在总结中，自然地领悟到以数助形的数学方法。这样提炼出来的思想方法就不仅仅是老师口中的数学思想方法，而是浸入学生头脑深处的能够带得走的，可以迁移的数学思想方法。这些思想方法的积累让数学核心素养自然而然地孕育。